# 雑文: 線形安定性解析

知っている人は見なくていいです。

# 雑文: ヤコビ行列を求めるのは何故か？

力学系

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \boldsymbol{f}(X)$$

について

固定点が求められたとし、固定点の一つを

$$X^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)$$

とする。

この固定点から、少しだけずれた場合、解軌道

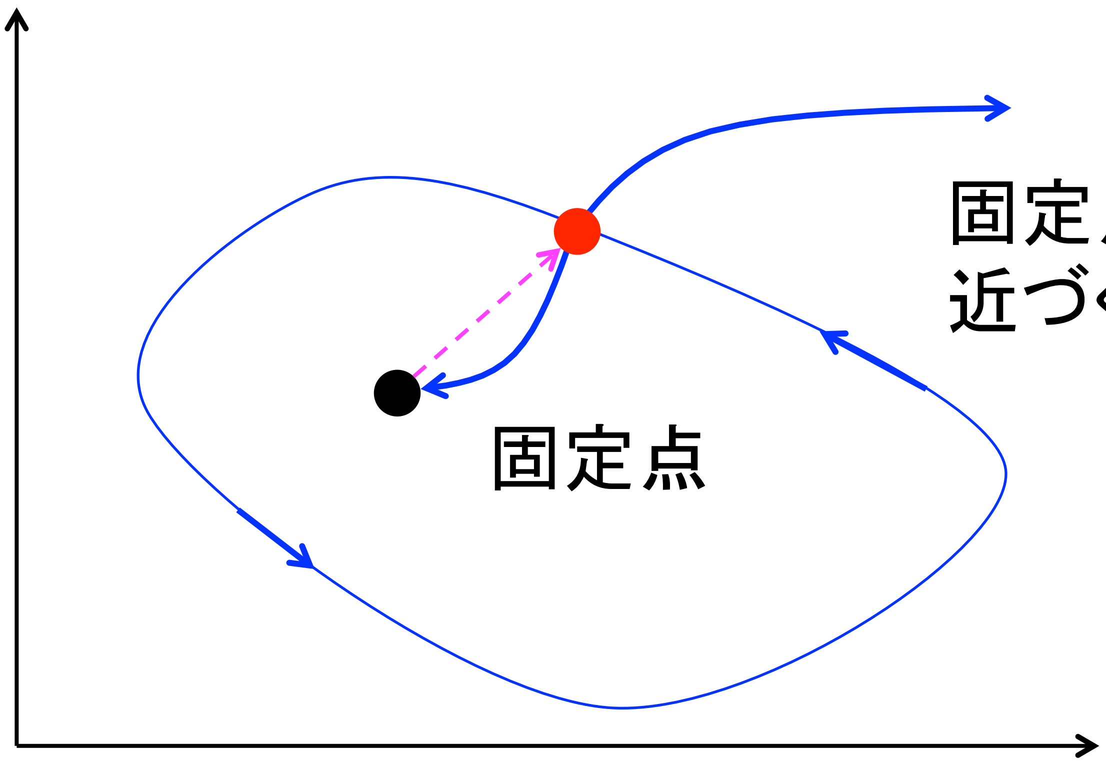
$$X(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$$

がどのように振る舞うのか、大まかに考えたい。

つまり、固定点から少しずれた点

$$X(t) = (x_1^* + \xi_1(t), \cdots, x_n^* + \xi_n(t))$$

において、$\xi_i(t)$ は大きくなる？小さくなる？




固定点に
近づく？離れる？回る？

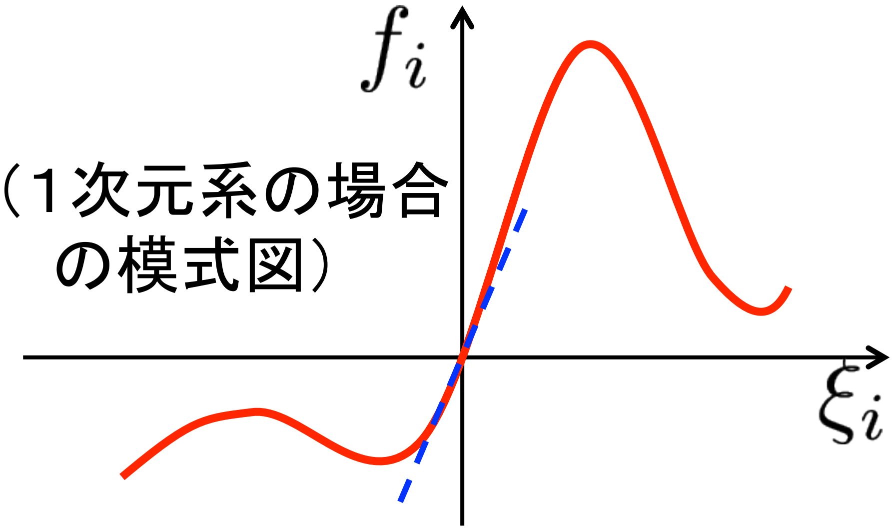
$$\dot{x}_i(t) = \frac{d}{dt}[x_i^* + \xi_i(t)] \boxed{= \dot{\xi}_i(t)}$$

$$= f_i(x_1^* + \xi_1(t), \dots, x_n^* + \xi_n(t))$$

$$= \cancel{f_i(x_1^*, \dots, x_n^*)} + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right|_{(x_1^*, \dots, x_n^*)} \cdot \xi_i \cancel{+ O({\xi_i}^2)}$$

テイラー展開

$\xi_i \ll 1$ なので、2次以上は無視！




（1次元系の場合の模式図）

つまり…
ずれが小さければ
線形近似出来る！

線形近似した結果…

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}$$

ヤコビ行列

（定数行列、固定点の座標を代入）

$$\dot{\Xi}(t) = J\Xi(t)$$

固定点からの小さなズレの時間発展は
線形連立微分方程式を解けばよい！

（解き方: 次頁以降の「固有値を求めるとわかること」）

# 雑文: 固有値を求めるとわかること
（知ってる人は飛ばして下さい）

変数 $x(t)$ と定数 $a$ に対する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax$$ の解は $x(t) = x(0)e^{at}$ となる。

では、ベクトル $X(t) = (x_1(t), \cdots x_n(t))$

と定数行列 $A = (a_{i,j})$ に対する微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = AX$$ の解はどうかというと、これも同じように

$$X(t) = e^{At}X(0)$$ となる。

疑問: $e^{At}$ とは何ぞや？

A.

$$e^{At} = 1 + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n$$

（マクローリン展開）

つまり、
（線形）微分方程式を解く ＝ 行列 $A$ の $n$ 乗を求める

# $A^n$を求めるために...

次に行列 $A$ の固有値について考える。
固有値とは、任意のベクトル $X$ に対して

$$(\lambda I - A)X = 0$$

が成り立つ定数 $\lambda$ のことである。($I$ は単位行列)

任意のベクトル $X$ に対して成り立つということは

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

が成り立つことを表している。

以降、話の簡単化の為、

行列 $A$ を2×2行列

ベクトル $X$ を2次元ベクトル

とし、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表記する

$$\det(\lambda I - A)$$

$$= \underbrace{\lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\boxed{\mathrm{tr} A}}\lambda + \underbrace{(ad-bc)}_{\boxed{\det A}} = 0}_{\boxed{\text{特性方程式}}}$$

$$\lambda = \frac{-(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} = \lambda_+, \lambda_-$$

固有値 $\lambda_+, \lambda_-$ に対応する固有ベクトルを

それぞれ $V_+, V_-$ とすると

$AV_\pm = \lambda_\pm V_\pm$ （固有ベクトルの定義）

従って

ベクトルを並べて行列に

$$A(V_+, V_-) = (V_+, V_-) \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

※ 2次正方行列で、重解を持つ場合、
対角化は出来ず、Jordan標準形になる。
（1行2列目が1になる）
このときの2つ目の固有ベクトルは
$(\lambda I - A)X = V$ を満たすもの。

$$A(V_+, V_-) = (V_+, V_-)\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

$(V_+, V_-) = P$ とおくと

$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$ となり

$$P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP = P^{-1}A^nP$$

$$= \begin{pmatrix} {\lambda_+}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_-}^n \end{pmatrix}$$

以上から、

$$A^n = P \begin{pmatrix} {\lambda_+}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_-}^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

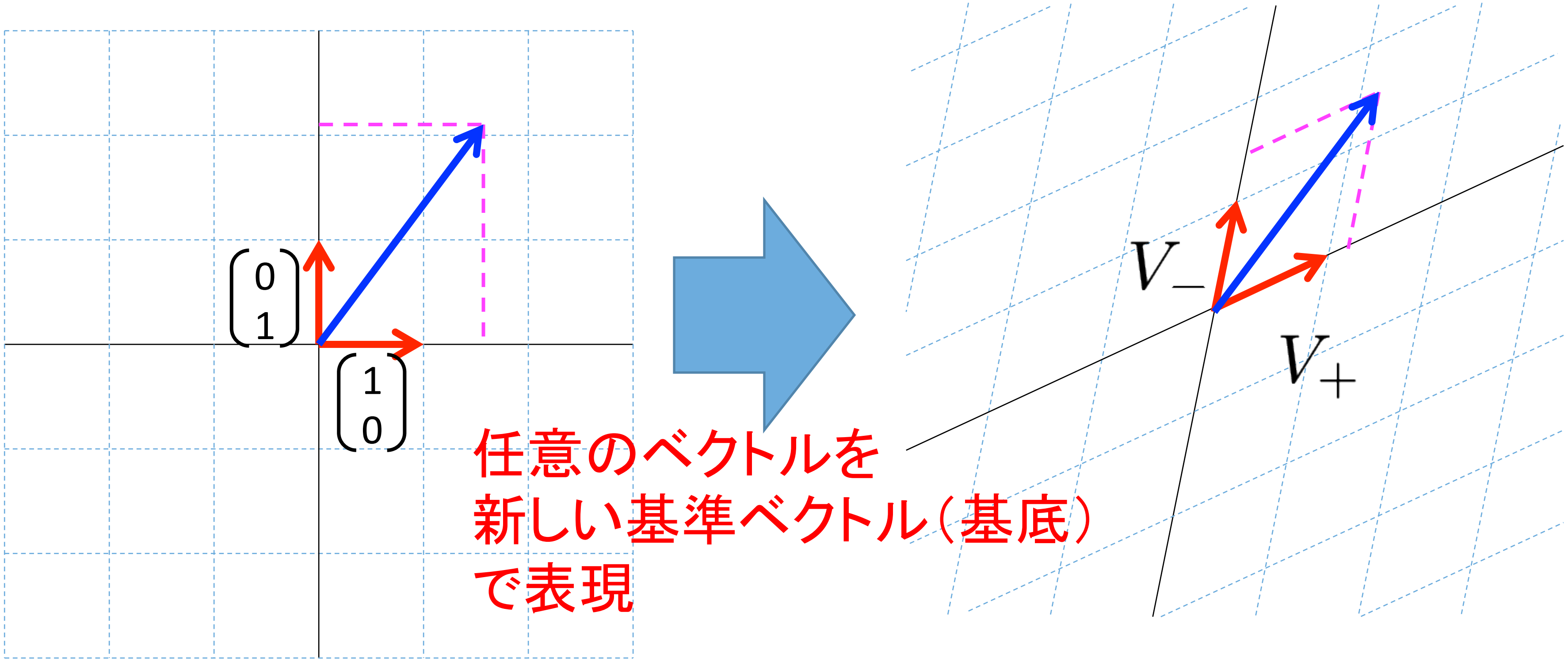
$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n X(0)$$ に代入すると

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_+ t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_- t)^n}{n!} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$ が意味すること

座標変換を考える




$V_+, V_-$ が一次独立ならば、任意のベクトルは
$V_+, V_-$ の線形結合によって表現可能

$X(t)$ を固有ベクトルを用いて次のように表現

$$X(t) = c_1(t)V_+ + c_2(t)V_-$$

これを

$$P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1}X(0)$$ に代入

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(0)e^{\lambda_+ t} \\ c_2(0)e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

つまり…

$X(t)$ の変化は $V_+, V_-$ の方向に分解でき、

その増加・減衰は、

指数 $\lambda_+, \lambda_-$ の指数関数に従う。

$$X(t) = c_1(t)V_+ + c_2(t)V_-$$

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(0)e^{\lambda_+ t} \\ c_2(0)e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

を、もともと考えていた式

$$\dot{\Xi}(t) = J\Xi(t)$$（ずれの時間発展）

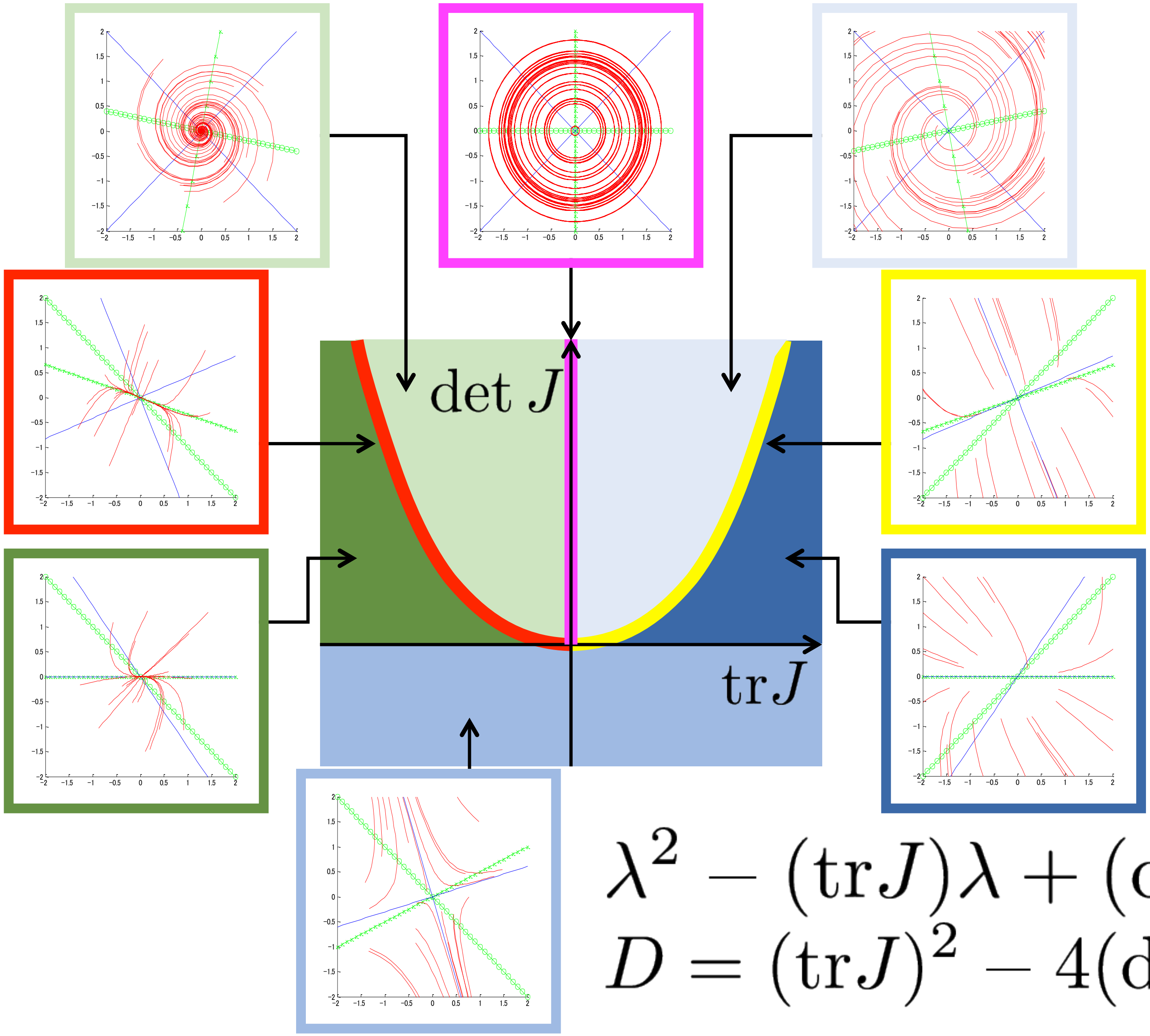
に置き換えて考える（例として2次元系）

固有値が…

- 2つの実数 → 符号が…
  - (1) 正と正
  - (2) 正と負
  - (3) 負と負
- 1つの実数 → 符号が…
  - (4) 正
  - (5) 負
- 2つの虚数
  - (6) 純虚数
  - (7) 実部正の虚数
  - (8) 実部負の虚数

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}J\lambda + \det J = 0$$

# tr-det平面で考えてみる　$\dot{\Xi}(t) = J\Xi(t)$




$$\lambda^2 - (\mathrm{tr}J)\lambda + (\det J) = 0$$
$$D = (\mathrm{tr}J)^2 - 4(\det J)$$

軌道 $X_1^*(t)$ と $X_2^*(t)$ が

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

の解軌道ならば、軌道$c_1X_1^*(t) + c_2X_2^*(t)$ も解軌道

証明

$$\frac{d}{dt}[c_1X_1^*(t) + c_2X_2^*(t)] = c_1\frac{dX_1^*(t)}{dt} + c_2\frac{dX_2^*(t)}{dt}$$

$$= c_1AX_1^*(t) + c_2AX_2^*(t) = A[c_1X_1^*(t) + c_2X_2^*(t)]$$

線形性

$X(t) = Ce^{(a \pm bi)t}$ が振動する理由

虚数が邪魔

オイラーの公式

$$X(t) = Ce^{(a \pm bi)t} = Ce^{at}[\cos bt \pm i \sin bt]$$

$$X_+(t) = Ce^{at}[\cos bt + i \sin bt]$$
$$X_-(t) = Ce^{at}[\cos bt - i \sin bt]$$

とおくと

$$X_1 = X_+(t) + X_-(t) = 2Ce^{at} \cos bt$$
$$X_2 = X_+(t) - X_-(t) = 2iCe^{at} \sin bt$$

も解。従って、

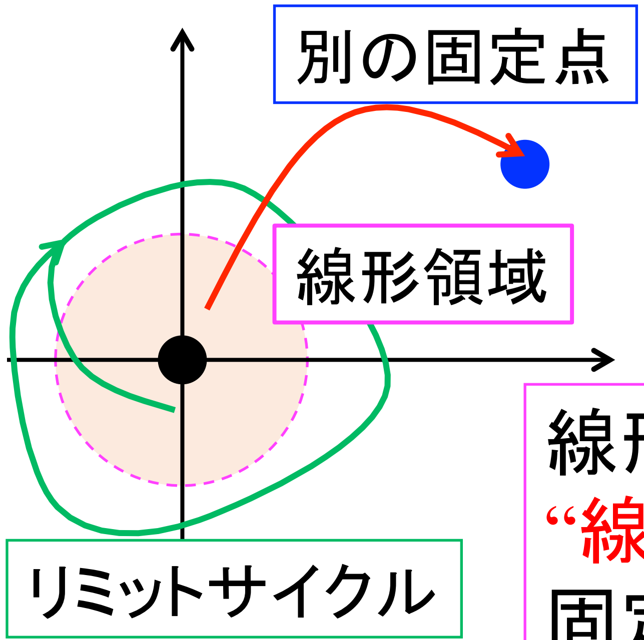
$$X^*(t) = X_1(t) - iX_2(t) = \underbrace{2Ce^{at}[\cos bt + \sin bt]}_{\text{全部実数}}$$

も解。（ただし $C = \dfrac{X^*(0)}{2}$ ）

注意点:

「固有値(の実部)が負」＝ 固定点は安定
＝ 解は収束する

「固有値(の実部)が正」＝ 固定点は不安定
≠ 解は発散する




∵リミットサイクルや
別の固定点に
収束する場合がある

線形安定性解析は
"線形領域のみでの議論"であり、
固定点から大きく離れたところでは
非線形性が利いてくる。
(非線形項がない場合、線形領域は無限遠まで)

# 固有値が重解を持つ場合

## 例1. 作用行列が三角行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & na\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$ を使う

$$\frac{A^n t^n}{n!} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^n t^n}{n!} & \frac{na\lambda^{n-1} t^n}{n!} \\ 0 & \frac{\lambda^n t^n}{n!} \end{pmatrix}$$

（次頁へ）

$\sum_{n=0}^{\infty}$ をつけると

対角成分は
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = e^{\lambda t}$$

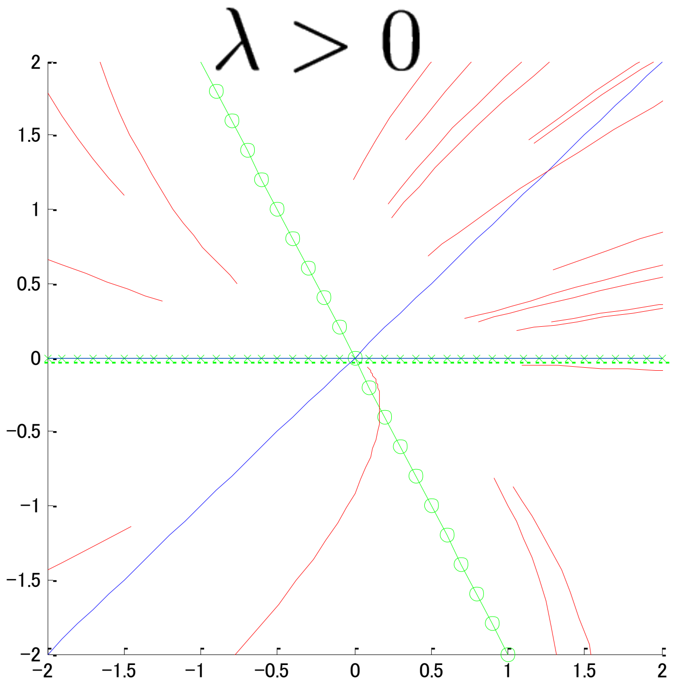
非対角成分は

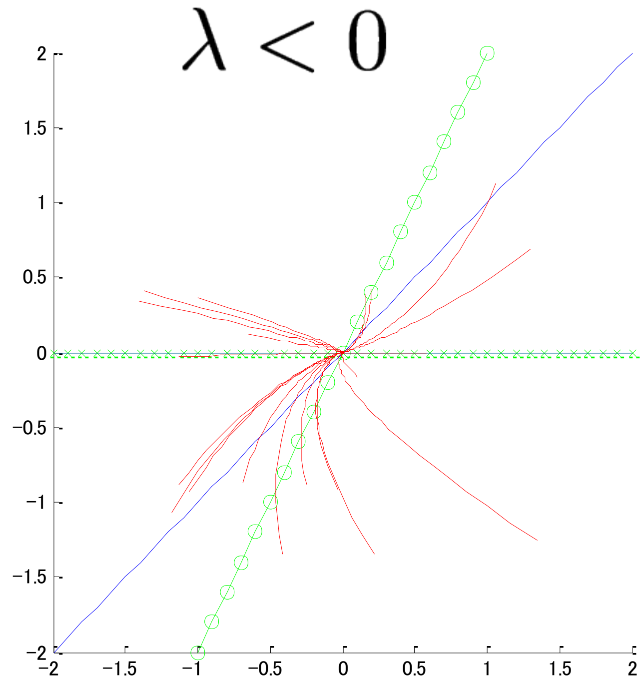
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{na\lambda^{n-1} t^n}{n!} = at \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= at \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = ate^{\lambda t}$$

従って

$$x(t) = e^{\lambda t}[x(0) + aty(0)]$$
$$y(t) = e^{\lambda t}y(0)$$



# 固有値が重解を持つ場合

## 例2. 作用行列が三角行列でない場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left( (\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \text{の解} \right)$$

2個目の固有ベクトルは？

$$(\lambda I - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{V}$$ の解

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$ の場合は

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x + y = -1$$

例えば、$V' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ を代用

※ このベクトルは厳密には
固有ベクトルではない！！

$P = (V, V')$ として、$P^{-1}AP$ を計算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordan標準形

あとは三角行列と同様

Jordan標準形が現れる理由

$$AV = \lambda V$$

$$AV' = \lambda V' + V$$

$$\Rightarrow A(V, V') = (\lambda V, \lambda V' + V)$$

$$= (V, V')\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

# 2次元 → n次元の話

（2次元と一緒）

固定点を求める。

⇩

ヤコビ行列を求める。

⇩

固有値・固有ベクトルを求める。

⇩

解の挙動を固有値と固有ベクトルで記述する。

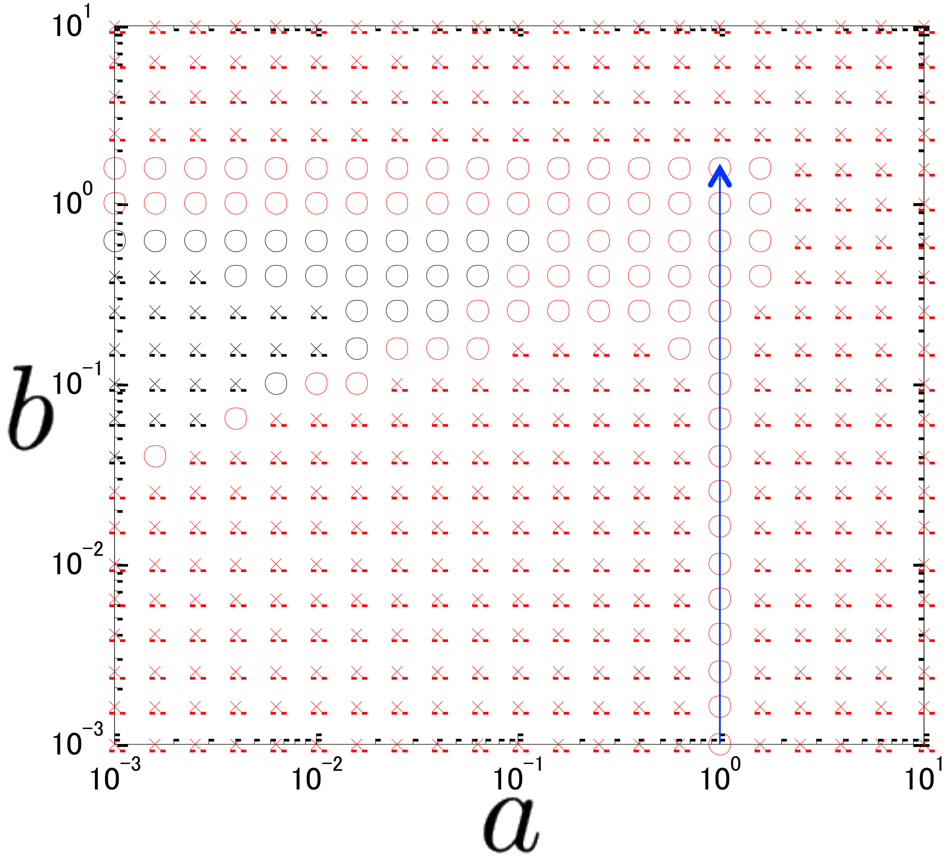
⇩

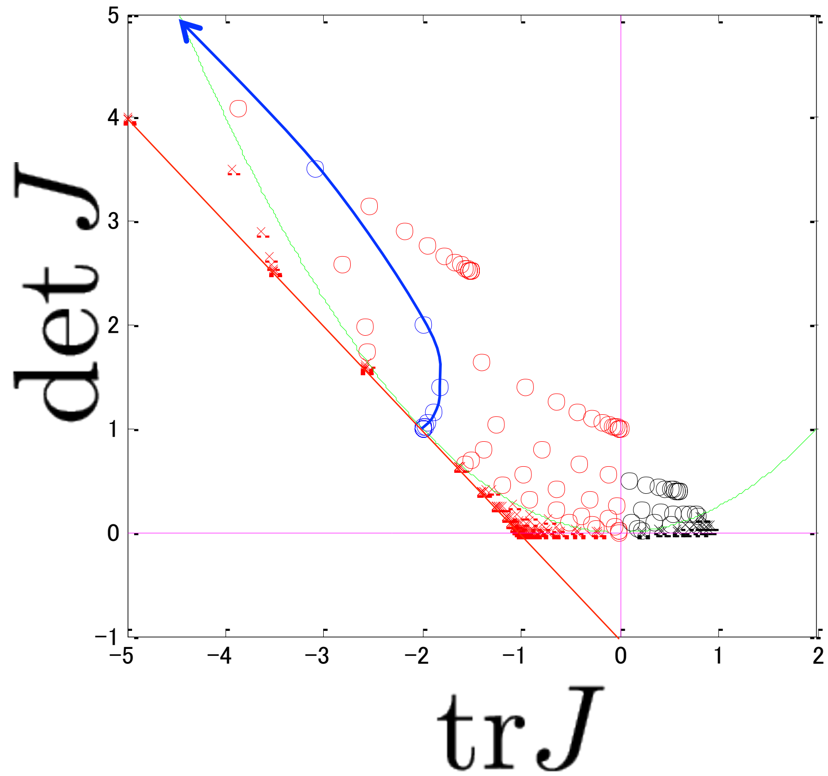
固有値（の実部）が全て負なら、固定点は安定。
1個でも正なら不安定。

# 線形安定性解析の例

## Sel'kov モデル（課題1-3）を例に

| 固有値が | 実部: 正 | 実部: 負 |
|---|---|---|
| 実数 | × | ×（赤） |
| 虚数 | ○ | ○（赤） |



非線形な系がリミットサイクルを持つかどうか
（興味がある人は調べて下さい）

- ポテンシャルを調べる。
- 極座標変換を行う。
- ポアンカレ-ベンディクソンの定理。
- フルウィッツの判定条件。
- リアプノフ関数の存在の有無。
- チェターイェフの不安定性定理。
- などなど

しかし、これらの定理を満たすことを証明するのは難しい。

後学の為の参考キーワード:
力学系、固有値問題、軌道安定性、分岐現象