

雑文：線形安定性解析

知っている人は見なくていいです。

雑文: ヤコビ行列を求めるのは何故か？

固定点が求められたとし、固定点の一つを

$$(x_1^*, \dots, x_n^*)$$

とする。

この固定点から、少しだけずれた場合、解軌道

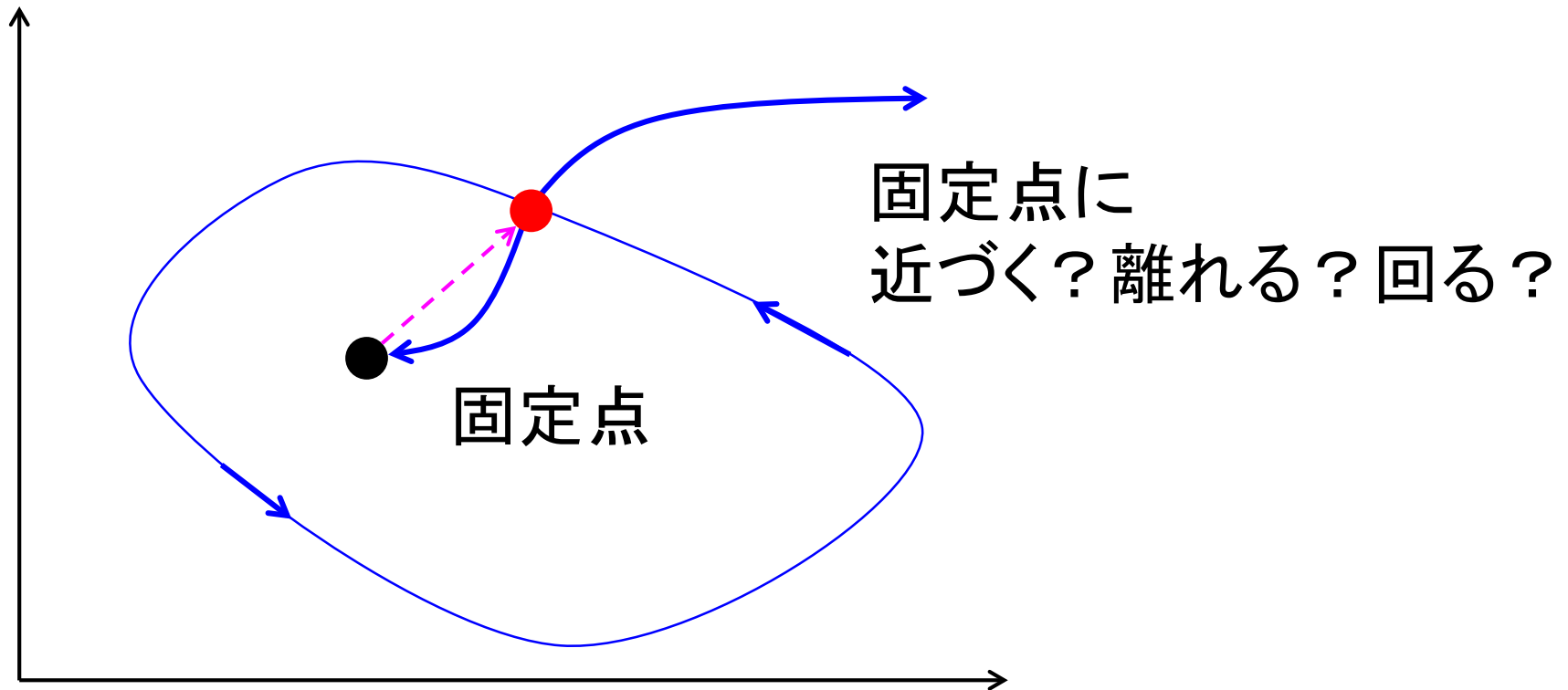
$$X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

がどのように振る舞うのか、大まかに考えたい。

つまり、固定点から少しずれた点

$$X(t) = (x_1^* + \xi_1(t), \dots, x_n^* + \xi_n(t))$$

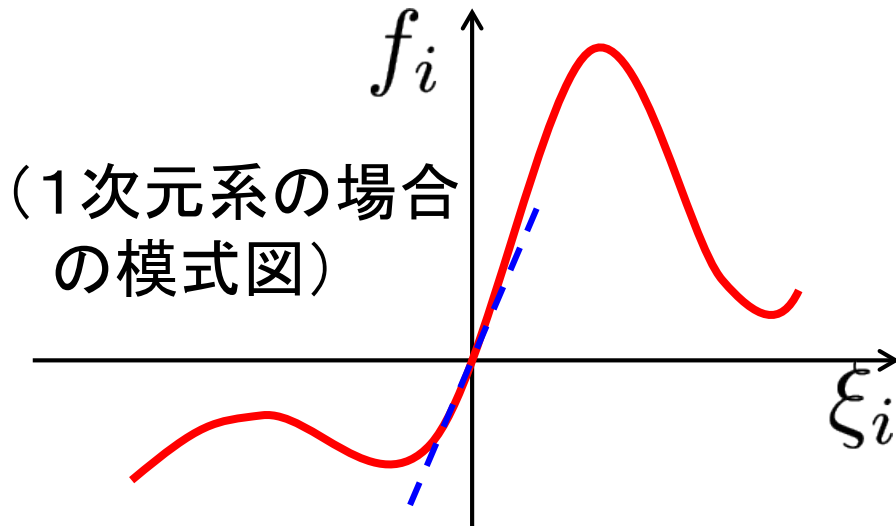
において、 $\xi_i(t)$ は大きくなる？小さくなる？



$$\begin{aligned}
\dot{x}_i(t) &= \frac{d}{dt}[x_i^* + \xi_i(t)] = \dot{\xi}_i(t) \\
&= f_i(x_1^* + \xi_1(t), \dots, x_n^* + \xi_n(t)) \\
&= \cancel{f_i(x_1^*, \dots, x_n^*)} + \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right|_{(x_1^*, \dots, x_n^*)} \cdot \xi_i + \cancel{O(\xi_i^2)}
\end{aligned}$$

$\xi_i \ll 1$ なので、2次以上は無視！

テイラー展開



つまり...
ずれが小さければ
線形近似出来る！

線形近似した結果...

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{\Xi}(t) = J\Xi(t)$$

ヤコビ行列

〔定数行列、
固定点の座標を代入〕

固定点からの小さなズレの時間発展は
線形連立微分方程式を解けばよい！

(解き方: 次頁以降の「固有値を求めるとわかること」)

雑文: 固有値を求めるとわかること

(知ってる人は飛ばして下さい)

変数 $x(t)$ と定数 a に対する微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = ax \text{ の解は } x(t) = x(0)e^{at} \text{ となる。}$$

では、ベクトル $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

と定数行列 $A = (a_{i,j})$ に対する微分方程式

$$\frac{dX}{dt} = AX \text{ の解はどうかというと、これも同じように}$$

$$X(t) = e^{At} X(0) \text{ となる。}$$

疑問: e^{At} とは何ぞや?

A.

$$e^{At} = 1 + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n \quad (\text{マクローリン展開})$$

つまり、

(線形)微分方程式を解く = 行列 A の n 乗を求める

A^n を求めるために...

次に行列 A の固有値について考える。
固有値とは、任意のベクトル X に対して

$$(\lambda I - A)X = 0$$

が成り立つ定数 λ のことである。(I は単位行列)

任意のベクトル X に対して成り立つということは

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

が成り立つことを表している。

以降、話の簡単化の為、
行列 A を 2×2 行列
ベクトル X を 2次元ベクトル

とし、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

で表記する

$$\det(\lambda I - A)$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(a + d)}_{\text{tr} A} \lambda + \underbrace{(ad - bc)}_{\det A} = 0$$

特性方程式

$$\lambda = \frac{-(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} = \lambda_+, \lambda_-$$

固有値 λ_+ , λ_- に対応する固有ベクトルを

それぞれ V_+ , V_- とすると

$$AV_{\pm} = \lambda_{\pm} V_{\pm}$$

ベクトルを並べて行列に

従って

$$A(V_+, V_-) = (V_+, V_-) \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

※ 2次正方行列で、重解を持つ場合、
対角化は出来ず、Jordan標準形になる。

(1行2列目が1になる)

このときの2つ目の固有ベクトルは

$$(\lambda I - A)X = V \text{ を満たすもの。}$$

$$A(V_+, V_-) = (V_+, V_-) \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

$(V_+, V_-) = P$ とおくと

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \text{ となり}$$

$$\begin{aligned} P^{-1}AP \cdots P^{-1}AP &= P^{-1}A^n P \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

以上から、

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_+^n & 0 \\ 0 & \lambda_-^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

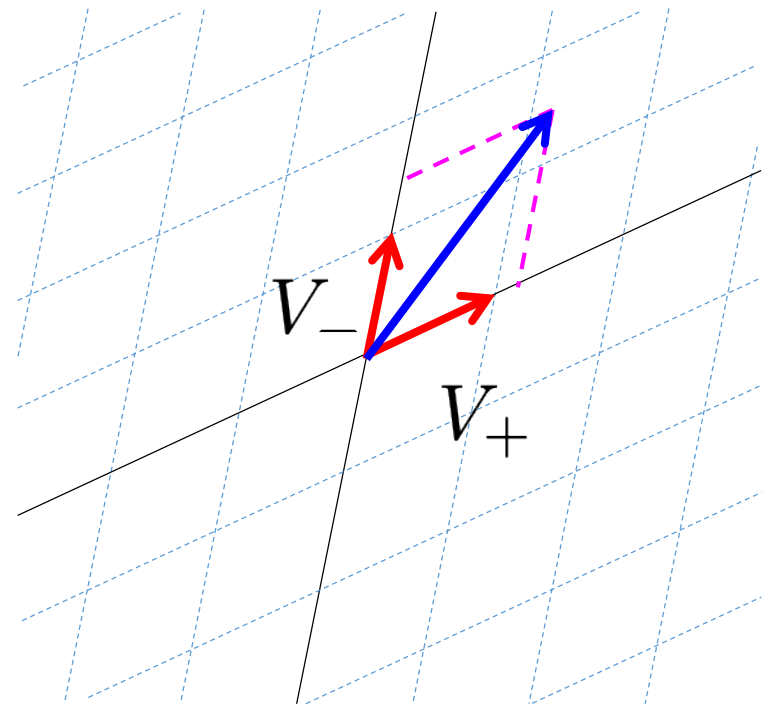
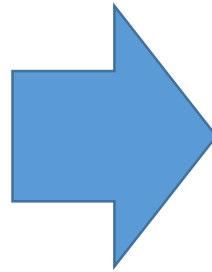
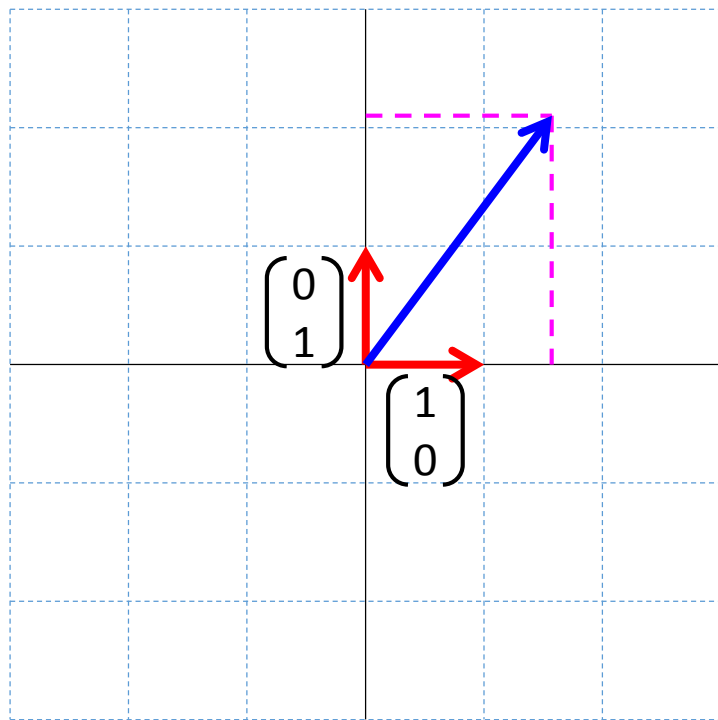
$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t^n X(0) \text{ に代入すると}$$

$$X(t) = P \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_+ t)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_- t)^n}{n!} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0)$$

$$X(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1} X(0) \text{ が意味すること}$$

座標変換を考える



V_+ , V_- が一次独立ならば、任意のベクトルは
 V_+ , V_- の線形結合によって表現可能

$X(t)$ を固有ベクトルを用いて次のように表現

$$X(t) = c_1(t)V_+ + c_2(t)V_-$$

これを

$$P^{-1}X(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+ t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_- t} \end{pmatrix} P^{-1}X(0) \text{ に代入}$$

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(0)e^{\lambda_+ t} \\ c_2(0)e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

つまり...

$X(t)$ の変化は V_+ , V_- の方向に分解でき、
その増加・減衰は、
指数 λ_+ , λ_- の指数関数に従う。

$$X(t) = c_1(t)V_+ + c_2(t)V_-$$

$$\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(0)e^{\lambda_+ t} \\ c_2(0)e^{\lambda_- t} \end{pmatrix}$$

を、もともと考えていた式

$$\dot{\Xi}(t) = J\Xi(t) \text{ (ずれの時間発展)}$$

に置き換えて考える(例として2次元系)

固有値が...

2つの**実数**

1つの**実数**

2つの**虚数**

符号が...

符号が...

(1) 正と正

(2) 正と負

(3) 負と負

(4) 正

(5) 負

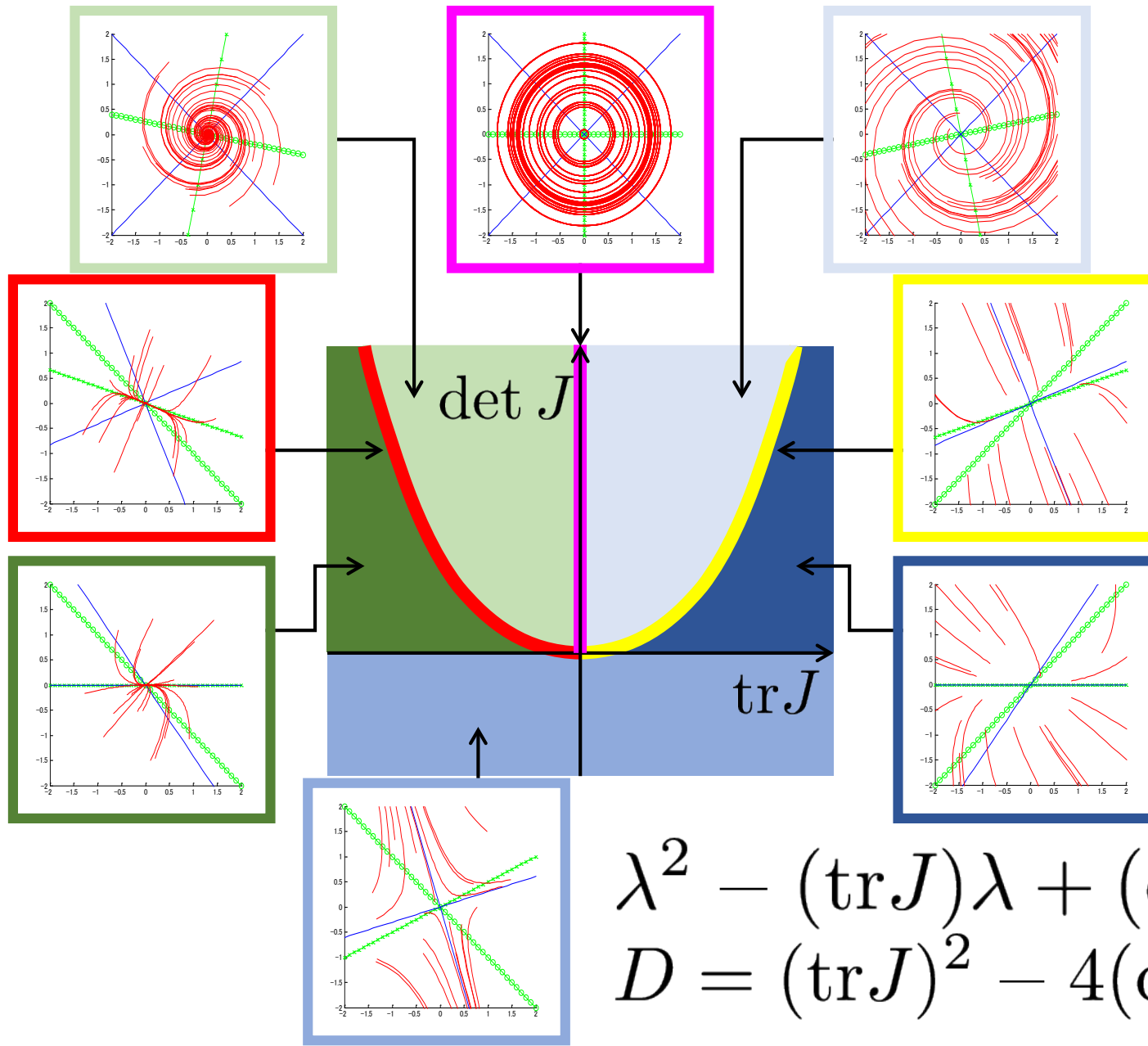
(6) 純虚数

(7) 実部正の虚数

(8) 実部負の虚数

$$\lambda^2 - \text{tr}J\lambda + \det J = 0$$

tr-det平面で考えてみる $\dot{\Xi}(t) = J\Xi(t)$



$$\lambda^2 - (\text{tr} J)\lambda + (\det J) = 0$$

$$D = (\text{tr} J)^2 - 4(\det J)$$

軌道 $X_1^*(t)$ と $X_2^*(t)$ が

$$\dot{X}(t) = AX(t)$$

の解軌道ならば、軌道 $c_1 X_1^*(t) + c_2 X_2^*(t)$ も解軌道

証明

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [c_1 X_1^*(t) + c_2 X_2^*(t)] &= c_1 \frac{dX_1^*(t)}{dt} + c_2 \frac{dX_2^*(t)}{dt} \\ &= c_1 AX_1^*(t) + c_2 AX_2^*(t) = A[c_1 X_1^*(t) + c_2 X_2^*(t)] \end{aligned}$$

$X(t) = Ce^{(a \pm bi)t}$ が振動する理由

虚数が邪魔

オイラーの公式

$$X(t) = Ce^{(a \pm bi)t} = Ce^{at} [\cos bt \pm i \sin bt]$$

$$X_+(t) = Ce^{at} [\cos bt + i \sin bt]$$

$$X_-(t) = Ce^{at} [\cos bt - i \sin bt]$$

とおくと

$$X_1 = X_+(t) + X_-(t) = 2Ce^{at} \cos bt$$

$$X_2 = X_+(t) - X_-(t) = 2iCe^{at} \sin bt$$

も解。従って、

$$X^*(t) = X_1(t) - iX_2(t) = \underline{2Ce^{at} [\cos bt + \sin bt]}$$

も解。 (ただし $C = \frac{X^*(0)}{2}$)

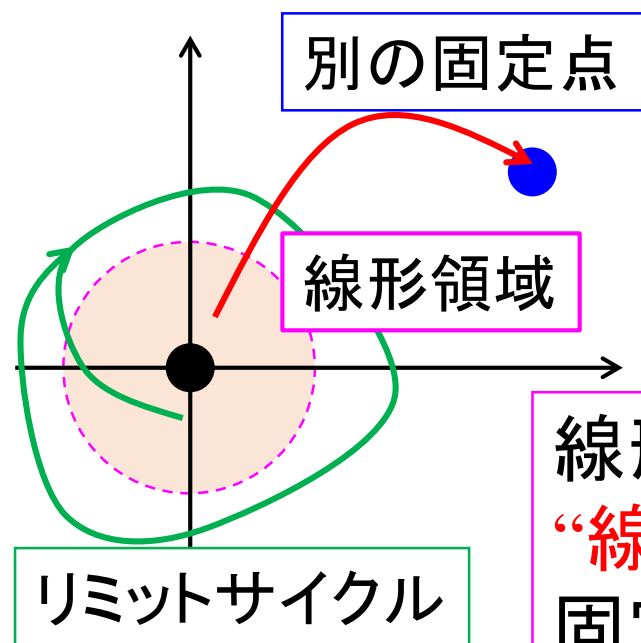
全部実数

注意点:

「固有値(の実部)が負」 = 固定点は安定
= 解は収束する

「固有値(の実部)が正」 = 固定点は不安定
≠ 解は発散する

∴ リミットサイクルや
別の固定点に
収束する場合がある



線形安定性解析は
“線形領域のみでの議論”であり、
固定点から大きく離れたところでは
非線形性が利いてくる。
(非線形項がない場合、線形領域は無限遠まで)

固有値が重解を持つ場合

例1. 作用行列が三角行列の場合

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & na\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \text{を使う}$$

$$\frac{A^n t^n}{n!} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^n t^n}{n!} & \frac{na\lambda^{n-1} t^n}{n!} \\ 0 & \frac{\lambda^n t^n}{n!} \end{pmatrix}$$

(次頁へ)

$\sum_{n=0}^{\infty}$ をつけると

$$\text{対角成分は } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = e^{\lambda t}$$

非対角成分は

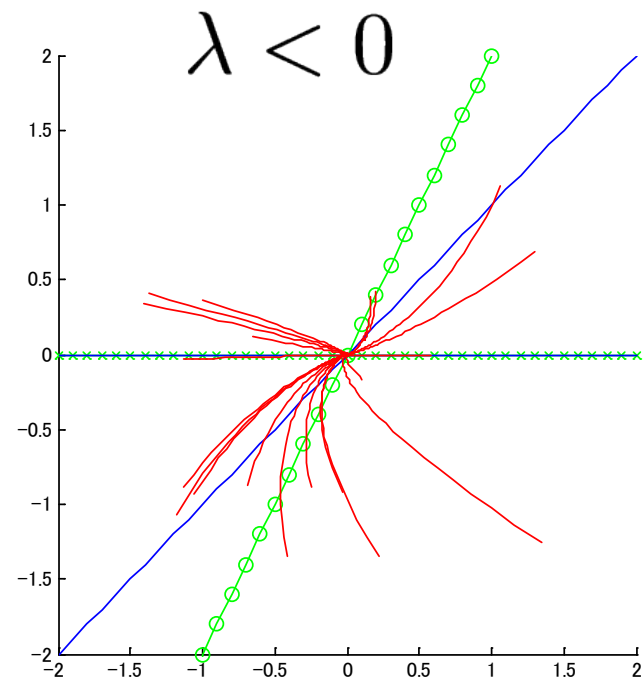
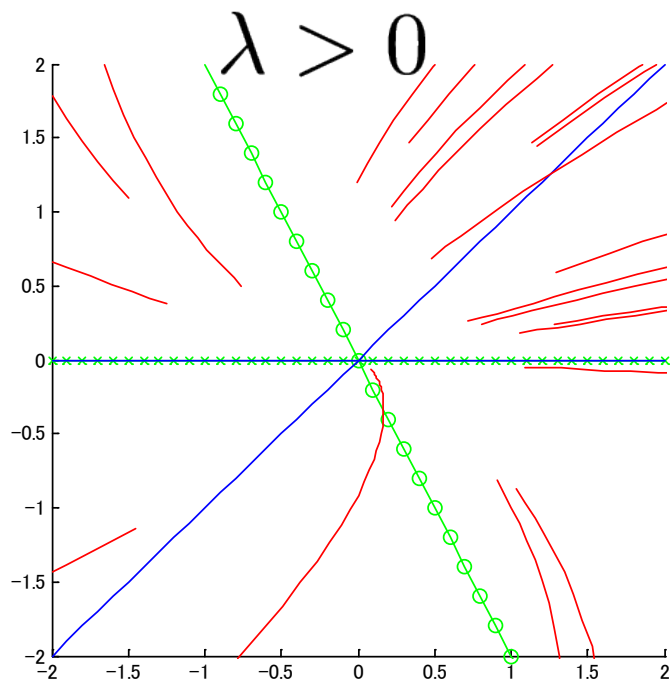
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{na\lambda^{n-1}t^n}{n!} = at \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= at \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = ate^{\lambda t}$$

従って

$$x(t) = e^{\lambda t} [x(0) + aty(0)]$$

$$y(t) = e^{\lambda t} y(0)$$



固有値が重解を持つ場合

例2. 作用行列が三角行列でない場合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

⇒ $\lambda = 2$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left[(\lambda I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \text{ の解} \right]$$

2個目の固有ベクトルは？

$$(\lambda I - A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{V} \text{ の解}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ の場合は}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x + y = -1$$

$$\text{例えば、} V' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ を代用}$$

※ このベクトルは
固有ベクトルではない！！

$P = (V, V')$ として、 $P^{-1}AP$ を計算

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Jordan標準形

あとは三角行列と同様

Jordan標準形が現れる理由

$$AV = \lambda V$$

$$AV' = \lambda V' + V$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A(V, V') &= (\lambda V, \lambda V' + V) \\ &= (V, V') \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2次元 → n次元の話

(2次元と一緒に)

固定点を求める。



ヤコビ行列を求める。



固有値・固有ベクトルを求める。



解の挙動を固有値と固有ベクトルで記述する。

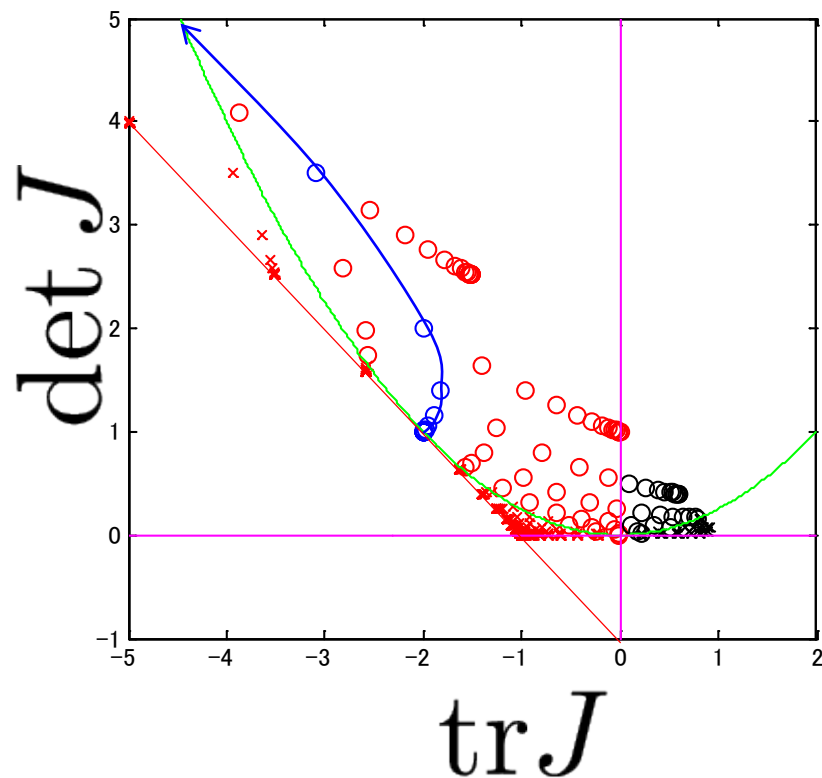
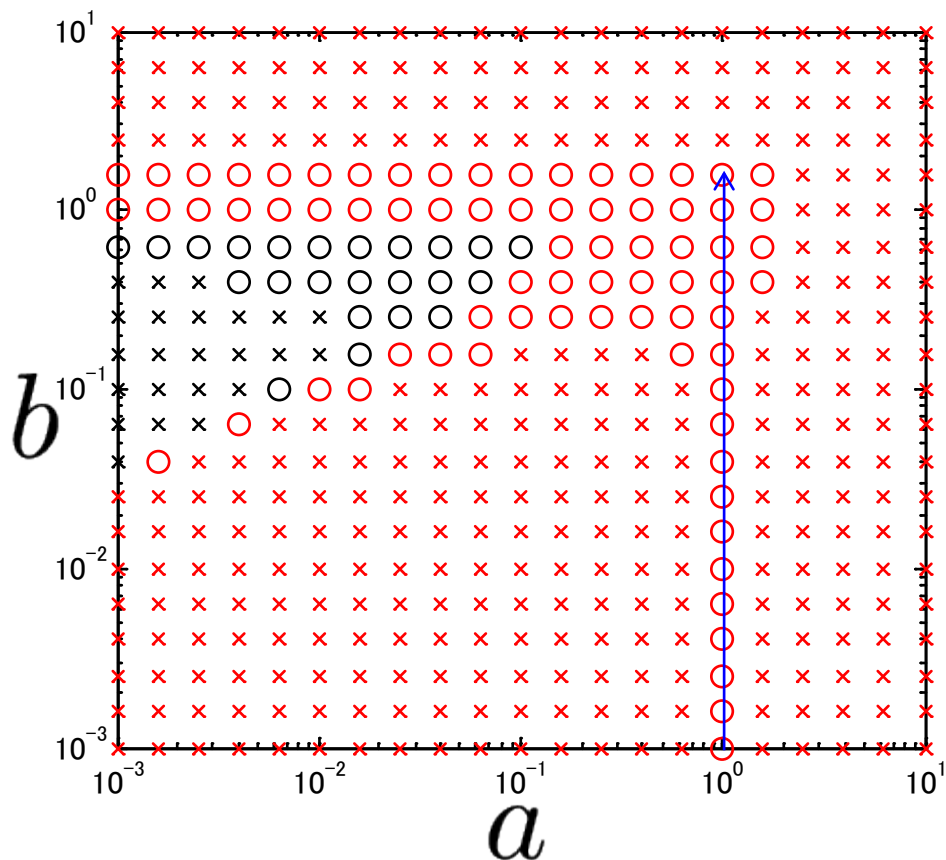


固有値(の実部)が全て負なら、固定点は安定。
1個でも正なら不安定。

線形安定性解析の例

Sel'kov モデル(課題1-3)を例に

固有値が	実部: 正	実部: 負
実数	×	×
虚数	○	○



非線形な系がリミットサイクルを持つかどうか
(興味がある人は調べて下さい)

- ポテンシャルを調べる。
- 極座標変換を行う。
- ポアンカレ-ベンディクソンの定理。
- フルウィッツの判定条件。
- リアプノフ関数の存在の有無。
- チェターイエフの不安定性定理。

しかし、これらの定理を満たすことを証明するのは難しい。

後学の為の参考キーワード:

力学系、固有値問題、軌道安定性、分岐現象